E N U N C I A D O S

Problema 1 - Substituição de variáveis

Calcule as seguintes substituições de variáveis:

(a) `[λz.λy.(y z)/x] ((λu.x u)(u x))`
(b) `[λu.(y u)/x] (λy.(x y))`
(c) `[2/z] λy.(λx.x y z) λz.z y`

Problema 2 - Redução Beta

Aplicando redução-β simplifique os seguintes termos:

(a) `(λu.u u)(λu.u u)`
(b) `(λy.(λz.w)y) ((λu.u u) (λu.u u))`
(c) `(λz.λy.λx.y(z x)) p q r`
(d) `(λz.λy.λx.y z) (z y) (u x) y`
(e) `(λx.λy.x (y y)) (λz.x (z z)) (λu.λv.u) w`

Problema 3 - Numerais (adição e multiplicação)

Considere a seguinte representação em termos lambda dos numerais:

0 = `λf.λx.x`
1 = `λf.λx.f x`
2 = `λf.λx.f (f x)`
....
n = `λf.λx.`$(f^n\ x)$ onde $f^n\ x$ exprime a aplicação de `f` a `x` exactamente `n` vezes.

e a seguinte representação em termos lambda:

mais = `λn.λm.λf.λx.n f (m f x)`
vezes = `λn.λm.λf.n (m f)`

Prove que:

(a) **mais 1 2 = 3**
(b) **vezes 1 1 = 1**
(c) **vezes 2 1 = 2**
(d) **vezes 3 2 = 6**

Problema 4 - Numerais (zero?)

Considere as representações apresentadas no Problema 3 e as seguintes:

zero? = `λx.x (λy.λz.`**falso**`) (λx.x)` **verd**
falso = `λx.λy.y`
verd = `λx.λy.x`

Prove que:

(a) **zero? 3 = falso**

(b) **zero? 2 = falso**

(c) **zero? 1 = falso**

(d) **zero? 0 = verd**

Problema 5 - Condicional

Considere a seguinte representação em termos lambda:

falso = $\lambda x.\lambda y.y$
verd = $\lambda x.\lambda y.x$
se = $\lambda x.x$

Prove que:

(a) **se verd 1 2 = 1**

(b) **se falso 1 2 = 2**

S O L U Ç Õ E S

Problema 1 - Substituição de variáveis

(a) [λz.λy.(y z)/x]((λu.x u)(u x))

= ([λz.λy.(y z)/x](λu.x u) [λz.λy.(y z)/x](u x))
= ([λz.λy.(y z)/x](λu.x u) ([λz.λy.(y z)/x]u [λz.λy.(y z)/x]x))
= ([λz.λy.(y z)/x](λu.x u) (u (λz.λy.(y z))))
= ((λu.[λz.λy.(y z)/x](x u) (u (λz.λy.(y z))))
= ((λu.([λz.λy.(y z)/x]x [λz.λy.(y z)/x]u) (u (λz.λy.(y z))))
= ((λu.(λz.λy.(y z)) u) (u (λz.λy.(y z))))

(b) [λu.(y u)/x] (λy.(x y))

= [λu.(y u)/x](λz.(x z))
= (λz.[λu.(y u)/x](x z))
= (λz.([λu.(y u)/x]x [λu.(y u)/x]z))
= (λz.((λu.(y u)) z))

(c) [2/z] λy.(λx.x y z) λz.z y

= λy.[2/z]((λx.x y z) (λz.z y)
= λy.[2/z](λx.x y z) [2/z](λz.z y)
= λy.[2/z](λx.x y z) (λz.z y)
= λy.(λx.[2/z]((x y) z)) (λz.z y)
= λy.(λx.[2/z](x y) [2/z]z))(λz.z y)
= λy.(λx.x y 2) (λz.z y)
= λy.(λx.x y 2) λz.z y

Problema 2 - Redução Beta

(a) (λu.u u)(λu.u u)

$\to_\beta$ [λu.u u/u] (u u) = (λu.u u)(λu.u u)
$\to_\beta$ [λu.u u/u] (u u) = (λu.u u)(λu.u u)
$\to_\beta$ … …
$\to_\beta$ (λu.u u)(λu.u u)

(b) (λy.(λz.w)y) ((λu.u u) (λu.u u))

$\to_\beta$ [((λu.u u) (λu.u u))/y]((λz.w)y) = (λz.w) ((λu.u u) (λu.u u))
$\to_\beta$ [((λu.u u) (λu.u u))/z] (w) = w

(c) (λz.λy.λx.y(z x)) p q r

$\to_\beta$ [p/z](λy.λx.y(z x)) q r = (λy.λx.y (p x)) q r

$\rightarrow_\beta$ `[q/y](λx.y (p x)) r` = `(λx.q (p x)) r`
$\rightarrow_\beta$ `[r/x](q (p x))` = `q (p r)`

(d) `(λz.λy.λx.y z) (z y) (u x) y`

$\rightarrow_\beta$ `[(z y)/z](λy.λx.y z)) (u x) y` = `[(z y)/z](λy.λx.y z)) (u x) y`
= `(λw.[(z y)/z][w/y](λx.y z)) (u x) y`
= `(λw.[(z y)/z](λx.w z)) (u x) y`
= `(λw.[(z y)/z](λx.w z)) (u x) y`
= `(λw.λx.w (z y)) (u x) y`
$\rightarrow_\beta$ `[(u x)/w](λx.w (z y)) y` = `(λv.[(u x)/w][v/x](w (z y)) y`
= `(λv.[(u x)/w](w (z y)) y`
= `(λv.(u x) (z y)) y`
$\rightarrow_\beta$ `[y/v]((u x) (z y))` = `(u x) (z y)`

(e) `(λx.λy.x (y y)) (λz.x (z z)) (λu.λv.u) w`

$\rightarrow_\beta$ `(λy.(λz.x (z z)) (y y)) (λu.λv.u) w`
$\rightarrow_\beta$ `(λy.x ((y y) (y y))) (λu.λv.u) w`
$\rightarrow_\beta$ `x (((λu.λv.u) (λu.λv.u)) ((λu.λv.u) (λu.λv.u))) w`
$\rightarrow_\beta$ `x ((λv.(λu.λv.u)) (λv.(λu.λv.u))) w`
$\rightarrow_\beta$ `x (λu.λv.u) w`

Problema 3 - Numerais (adição e multiplicação)

(a) **mais 1 2 = 3**

`(λn.λm.λf.λx.n f (m f x)) (λf.λx.f x) (λf.λx.f (f x))`

$\rightarrow_\beta$ `(λm.λf.λx.(λf.λx.f x) f (m f x)) (λf.λx.f (f x))`
$\rightarrow_\beta$ `(λm.λf.λx.(λx.f x) (m f x)) (λf.λx.f (f x))`
$\rightarrow_\beta$ `(λm.λf.λx.f (m f x)) (λf.λx.f (f x))`
$\rightarrow_\beta$ `λf.λx.f ((λf.λx.f (f x)) f x)`
$\rightarrow_\beta$ `λf.λx.f ((λx.f (f x)) x)`
$\rightarrow_\beta$ `λf.λx.f (f (f x))`
= **3**

(b) **vezes 1 1 = 1**

`(λn.λm.λf.n (m f)) (λf.λx.f x) (λf.λx.f x)`

$\rightarrow_\beta$ `(λm.λf.(λf.λx.f x) (m f)) (λf.λx.f x)`
$\rightarrow_\beta$ `(λm.λf.(λx.(m f) x)) (λf.λx.f x)`
$\rightarrow_\beta$ `λf.λx.(λf.λx.f x) f x`
$\rightarrow_\beta$ `λf.λx.(λx.f x) x`
$\rightarrow_\beta$ `λf.λx.f x`
= **1**

(c) **vezes 2 1 = 2**

$(\lambda n.\lambda m.\lambda f.n\ (m\ f))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)$

$\to_\beta\ (\lambda m.\lambda f.(\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))\ (m\ f))\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)$

$\to_\beta\ (\lambda m.\lambda f.(\lambda x.(m\ f)\ ((m\ f)\ x)))\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)$

$\to_\beta\ (\lambda m.\lambda f.\lambda x.m\ f\ ((m\ f)\ x))\ (\lambda f.\lambda x.f\ x)$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.(\lambda f.\lambda x.f\ x)\ f\ (((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ f)\ x)$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\ x)\ (((\lambda f.\lambda x.f\ x)\ f)\ x)$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\ x)\ ((\lambda x.f\ x)\ x)$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\ x)\ (f\ x)$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$

$=\ \mathbf{2}$

(d) $\mathbf{vezes\ 3\ 2 = 6}$

$(\lambda n.\lambda m.\lambda f.n\ (m\ f))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ x)))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$

$\to_\beta\ (\lambda m.\lambda f.(\lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ x)))\ (m\ f))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$

$\to_\beta\ (\lambda m.\lambda f.(\lambda x.(m\ f)\ ((m\ f)\ ((m\ f)\ x)))\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ x))$

$\to_\beta\ \lambda f.(\lambda x.((\lambda f.\lambda x.f(f\ x))f)\ (((\lambda f.\lambda x.f(f\ x))f)(((\lambda f.\lambda x.f(f\ x))f)x)))$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.((\lambda f.\lambda x.f(f\ x))f)\ (((\lambda f.\lambda x.f(f\ x))f)\ (((\lambda f.\lambda x.f(f\ x))f)x))$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.(\lambda x.f\ (f\ x))\ ((\lambda x.f\ (f\ x))\ ((\lambda x.f\ (f\ x))\ x))$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.f\ (f\ ((\lambda x.f\ (f\ x))\ ((\lambda x.f\ (f\ x))\ x)))$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ (f\ ((\lambda x.f\ (f\ x))\ x))))$

$\to_\beta\ \lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ (f\ (f\ (f\ x)))))$

$=\ \mathbf{6}$

Problema 4 - Numerais (zero?)

(a) $\mathbf{zero?\ 3 = falso}$

$(\lambda x.x\ (\lambda y.\lambda z.\mathbf{falso})\ (\lambda x.x)\ \mathbf{verd})\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ x)))$

$\to_\beta\ (\lambda f.\lambda x.f\ (f\ (f\ x)))\ (\lambda y.\lambda z.\mathbf{falso})\ (\lambda x.x)\ \mathbf{verd}$

$\to_\beta\ \lambda x.(\lambda y.\lambda z.\mathbf{falso})\ ((\lambda y.\lambda z.\mathbf{falso})\ ((\lambda y.\lambda z.\mathbf{falso})\ x))\ (\lambda x.x)\ \mathbf{verd}$

$\to_\beta\ \lambda x.(\lambda z.\mathbf{falso})\ (\lambda x.x)\ \mathbf{verd}$

$\to_\beta\ \lambda x.\mathbf{falso}\ \mathbf{verd}$

$\to_\beta\ \lambda x.(\lambda x.\lambda y.y)\ (\lambda x.\lambda y.x)$

$\to_\beta\ \lambda x.\lambda y.y$

$=\ \mathbf{falso}$

(b) **zero? 2 = falso**

(λx.x (λy.λz.**falso**) (λx.x) **verd**) (λf.λx.f (f x))

$\rightarrow_\beta$ (λf.λx.f (f x)) (λy.λz.**falso**) (λx.x) **verd**
$\rightarrow_\beta$ λx.(λy.λz.**falso**) ((λy.λz.**falso**) x) (λx.x) **verd**
$\rightarrow_\beta$ λx.(λz.**falso**) (λx.x) **verd**
$\rightarrow_\beta$ λx.**falso** **verd**
$\rightarrow_\beta$ λx.(λx.λy.y) (λx.λy.x)
$\rightarrow_\beta$ λx.λy.y
= **falso**

(c) **zero? 1 = falso**

(λx.x (λy.λz.**falso**) (λx.x) **verd**) (λf.λx.f x)

$\rightarrow_\beta$ (λf.λx.f x) (λy.λz.**falso**) (λx.x) **verd**
$\rightarrow_\beta$ λx.((λy.λz.**falso**) x) (λx.x) **verd**
$\rightarrow_\beta$ λx.(λz.**falso**) (λx.x) **verd**
$\rightarrow_\beta$ λx.**falso** **verd**
$\rightarrow_\beta$ λx.(λx.λy.y) (λx.λy.x)
$\rightarrow_\beta$ λx.λy.y
= **falso**

(d) **zero? 0 = verd**

(λx.x (λy.λz.**falso**) (λx.x) **verd**) (λf.λx.x)

$\rightarrow_\beta$ (λf.λx.x) (λy.λz.**falso**) (λx.x) **verd**
$\rightarrow_\beta$ λx.x (λx.x) **verd**
$\rightarrow_\beta$ (λx.x) **verd**
$\rightarrow_\beta$ **verd**

Problema 5 - Condicional

(a) **se verd 1 2 = 1**

(λx.x) (λx.λy.x) **1 2**

$\rightarrow_\beta$ (λx.λy.x) **1 2**
$\rightarrow_\beta$ (λy.1) **2**
$\rightarrow_\beta$ (λy.1) **2**
$\rightarrow_\beta$ **1**

(b) **se falso 1 2 = 2**

(λx.x) (λx.λy.y) **1 2**

$\rightarrow_\beta$ (λx.λy.y) **1 2**

$\rightarrow_\beta$ `(λy.y) 2`

$\rightarrow_\beta$ `2`